577. 二重ノ近傍系ニヨル收斂ノ定義ニ就テ II

角谷 静夫（阪大）

次ニ äusseres Abzählbarkeitsaxiom ヲ満足シナイ $\mathfrak{W}$—空間ノ一例ヲ示サウ。

R ヲ $1, 2, 3, \cdots\cdots, \omega$ ヨリ成立スル空間トシ R ニ於ケル各点ノ近傍系ヲ次ノ如ク定義スル。

1° $\{\mathfrak{U}(n)\}$ ハ $\mathfrak{U}(n)=n$ ナル近傍一ツヨリ成ル。

$n=1,2,\cdots\cdots$

2° $\{\mathfrak{U}(\omega)\}$ ハ $\mathfrak{U}_n(\omega)=(n,n+1,\cdots\cdots,\omega)$ ナル近傍 $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ヨリ成ル。

3° $\{\mathfrak{V}(n)\}$ ハ $\mathfrak{V}(n)=(1,2,\cdots\cdots,\omega)$ ナル近傍一ツヨリ成ル。

4° $\{\mathfrak{V}(\omega)\}$ ハ $\mathfrak{V}_\alpha(\omega)=(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n,\cdots\cdots,\omega)$ ナル近傍全体ヨリ成ル。コヽニ $\alpha=(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n,\cdots\cdots)$ ハ $a_1<a_2<\cdots\cdots<a_n<a_{n+1}<\cdots\cdots$, $\lim_{n\to\infty} a_n/n=\infty$ ナル如キ自然數ノ系列ヲ表ハス。

此ノ如ク定義サレタ近傍系 $\{\mathfrak{U}(a)\}$, $\{\mathfrak{V}(a)\}$ $a\in R$ ガ前ニ述ベタ條件ヲ満足シテヰルコトハ明カデアルカラRハ $\mathfrak{UV}$—空間ト考ヘルコトガ出來ル。

1°ヨリ明カナル如ク、コノ空間ニ於テハ点 n ハ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ 何レモ孤立点デ点列 $\{a_n\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ハ $a_1<a_2<\cdots\cdots<a_n<a_{n+1}<\cdots\cdots$ ナル如ク並ベタトキ $\lim_{n\to\infty} a_n/n=\infty$ ナルトキ、且ツソノ時ノミ ω ニ $\mathfrak{UV}$ 收斂スル。

コノ空間ニ於テ $\{\mathfrak{V}(\omega)\}$ ガ *äusseres Abzählbarkeitsaxiom* ヲ満足シテヰナイコトハ容易ニワカル。實際 $\{\mathfrak{V}(\omega)\}$ カラ任意ニ $\{\mathfrak{V}_n(\omega)\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ヲ

$$\mathfrak{V}_1(\omega)\subset\mathfrak{V}_2(\omega)\subset\cdots\cdots\subset\mathfrak{V}_n(\omega)\subset\mathfrak{V}_{n+1}(\omega)\subset\cdots\cdots$$

ナル如ク選ンダトキ如何ナル n ニ對シテモ $\mathfrak{V}(\omega)\subset\mathfrak{V}_n(\omega)$

トナラナイ様ナ $\nabla(\omega)$ ガ存在スル。カヽル $\nabla(\omega)$ ヲ作ルタメニハ先ヅ任意ニ a_1 ヲ $a_1 \overline{\in} \nabla_1(\omega)$ ナル如クトリ、a_τ ガ $\tau=1, 2, \cdots\cdots, n-1$ ニ對シテ定マツタトキ a_n ヲ $a_n \overline{\in} \nabla_n(\omega)$, $a_n > a_{n-1}$, $a_n > n^2$ ナル如ク取リ $\nabla(\omega)=(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots, \omega)$ トオケベヨイ。

又コノ空間ガ前ノ性質 (6) ヲ満足シテヰナイコトヲ容易ニワカル。

Kompakt ナ $\mho\nabla$－空間

$\mho\nabla$－空間ガ $\mho\nabla$－收斂ノ意味デ Kompakt ナトキ之レヲ $\mho\nabla$－Kompakt デアルト云フ。例ヘバ，上記ノ例ハ $\mho\nabla$－kompakt デアル。任意ノ可附番個ノ点列 $\{a_n\}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ ヨリ $a_{\kappa_1} < a_{\kappa_2} < \cdots\cdots < a_{\kappa_n} < \cdots\cdots$ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{\kappa_n}}{n} = \infty$ トナル如キ部分列 $\{a_{\kappa_n}\}$ ヲ撰ブコトガ出來コレハ明カニ ω ト云フ点ニ $\mho\nabla$－收斂スルカラデアル。

(7) $\mho\nabla$－kompakt ナ $\mho\nabla$ 空間ガ äusseres Abzählbarkeitsaxiom ヲ満足スレバ $\mho\nabla$－收斂ト $\mho$－收斂トハ同等デアル。

但シコヽデ $\mho$－收斂ト云フノハ $\mho\nabla$－空間ヲ定義シテヰル $\mho$ 近傍系ニヨル普通ノ收斂ノコトデアル。

證明： $a_n \xrightarrow[\mho\nabla]{} a$ ナラバ $a_n \xrightarrow[\mho]{} a$ トナルコトハ (5) ヨリ明カデアルカラ $a_n \xrightarrow[\mho]{} a$ ナラバ $a_n \xrightarrow[\mho\nabla]{} a$ ナルコトヲ證明スレバヨイ。

ヨツテ $a_n \xrightarrow[\mho]{} a$ ニテ $a_n \not\xrightarrow[\mho\nabla]{} a$ ナル如キ点列 $\{a_n\}$ ト

$\{a\}$ ガ存在スレバ矛盾ガオコルコトヲ示セバヨイ。

先ヅ $a_n \xrightarrow[\mho\nabla]{+} a$ ヨリ (6) ニヨッテ $\{a_n\}$ ノ部分ヨリ $\{a_{k_n}\}$ ヲトッテ $\{a_{k_n}\}$ ノ如何ナル部分列モ $a = \mho\nabla -$ 收斂シナイヤウニスルコトガ出來ル。空間ハ $\mho\nabla$-Kompakt デアルカラ $\{a_{k_n}\}$ ノ適當ナ部分列 $\{a_{k_n'}\}$ ハ空間ノ一點 b ニ收斂スル筈デアル。シカシ上デ述ベタコトヨリ $b \neq a$ デナケレバナラナイ。

然ルニ他方 $a_n \xrightarrow[\nabla]{} a$ デアリ、$\{a_{k_n'}\}$ ハ $\{a_n\}$ ノ部分列デアルカラ $a_{k_n'} \xrightarrow[\nabla]{} a$ デナケレバナラナイ。即チ $b = a$ デナケレバナラナイ。コレハ矛盾デアルカラ $a_n \xrightarrow[\mho]{} a$ ナラバ $a_n \xrightarrow[\mho\nabla]{} a$ デナケレバナラナイ。（證明終）

コノ證明ニ äusseres Abzählbarkeitsaxiom ガ必要ナコトハ上ニ述ベタ例ニ於テハ $\mho\nabla$ kompakt ナ $\mho\nabla$-空間デアリナガラコノ定理ガ成立シナイコトカラ分ル。

Hausdorff ノ 2-es abzählbarkeitsaxiom ニ對應スル äusseres Abzählbarkeitsaxiom

始メニ述ベタ ∇-近傍系ニ關スル條件ノ外ニモウ一ツ次ノ條件ガ考ヘラレル。

$2-4^\circ$ 任意ノ $\nabla(a)$ ト b トニ對シテ $\nabla(a) \subset \nabla(b)$ トナル如キ b ノ近傍 $\nabla(b)$ ガ存在スル。

コレハ

$1-4^\circ$ 任意ノ $b \in \nabla(a)$ ニ對シテ $\mho(b) \subset \mho(a)$ ナル b ノ近傍 $\mho(b)$ ガ存在スル。

ト云フ條件ニ對應スルモノデアル。

然シナガラ$\{\nabla(a)\}$ガコノ様ナ條件ヲ満足スルト云フコトハ非常ニ強イ條件デアルコトハ次ノ定理ニヨツテワカル。

(8) $\mathrm{U}\nabla$－空間デ$\{\nabla(a)\}$ガ條件2—4°ヲ満足シテ居レバ$\{\nabla(a)\}$全体ハ一ツノ$\{\nabla\}$ニヨツテオキカヘラレル。

即チ空間全体ニaニ無関係ナ一ツノ近傍系$\{\nabla\}$ヲ作ツテ点列ノ收斂$a_n \xrightarrow[\mathrm{U}\nabla]{} a$ヲ少クトモ一ツノ$\nabla$ニ對シテ$a_n \in \nabla$ $(n=1, 2, \text{-------})$デ且ツ任意ノ$\mathrm{U}(a)$ニ對シテ殆ンドスベテノ$a_n \in \mathrm{U}(a)$トナルト云フコトニヨツテ定義ヲカヘルコトガ出來ル。

コノ様ナ$\{\nabla\}$ヲ作ルタメニハ空間ノ任意ノ点a_0ニ對シテ$\{\nabla\} = \{\nabla(a_0)\}$トオケバヨイノデアル。(アル集合ガ全部一ツノ$\nabla(a)$ニ含マレテキルト云フコトハ$a$ニハ無関係ナノデアル!)

コノヤウナ條件2—4°ヲ満足スル空間ノ一例ハ次ノ述ベル *doppel-metrischer Raum* ニヨツテ與ヘラレル。